

分数阶互感及变压器模型的特性分析

刘潇, 张波, 谢帆, 丘东元

华南理工大学电力学院, 广东广州 510640

中图分类号: TM4 文献标识码: B 文章编号: 1606-7517 (2016) 11-5-131

摘要: 近年来, 分数阶微积分在多个科学研究领域得到广泛的研究, 但目前涉及磁能耦合、电能转换等方面的分数阶特性研究还较少。特别是随着无线电能传输的关注度越来越高, 更有必要对通过磁能进行的电能转换的分数阶系统进行研究。因此, 本文对互感电路及变压器模型在分数阶特性下的各种性能进行了分析。首先介绍了传统分数阶电容和电感串并联电路的阻抗分析, 接着沿用该分析方法, 研究了分数阶互感电路及变压器模型的等效电路阻抗矩阵参数的阻抗特性, 得出其相位特性, 并分析了不同阻抗特性下, 阻抗频率、幅值与电感阶次的关系。从分析中可知, 分数阶互感电路及变压器模型的电路参数增加了自感和互感的阶次, 因此整个模型设计自由度更高, 更具有一般性。本文的研究将有助于分数阶无线电能传输系统的发展。

关键词: 互感电路, 变压器模型, 阻抗特性

Analysis of Fractional-order Mutual Inductance and Transformer Model

LIU XIAO, ZHANG BO, XIE FAN, QIU DONGYUAN

School of Electrical Power, South China University of Technology,
Guangzhou 510640, Guangdong Province, China

Abstract: Fractional calculus has been applied in numerous scientific fields recently. But few researches have analyzed the fractional-order characteristics of magnetic coupling and electrical energy conversion. Hence in this paper, fractional-order characteristics of the mutual coupled circuit and transformer model are analyzed. First, impedance analysis of a fractional $L_{\beta}C_{\alpha}$ series circuit is introduced as an example. Then, the same analytical method is been used to analyze the impedance characteristics of the impedance matrix parameters of the fractional-order mutual coupled circuit and transformer model. As a result, phase characteristics as well as relationships between impedance frequencies and inductor orders are obtained. Compared with traditional circuits, the fractional-order mutual coupled circuit and transformer model has employed self-inductance and mutual-inductance of fractional orders, which have increased the design degree of freedom.

Keywords: mutual coupled circuit, transformer model, impedance characteristics

1 引言

分数阶微积分 (Fractional Calculus) 是在经典微积分理论基础上产生的用以描述任意阶次微分和积分的数学分支, 并已成为多个科学工程领域的有力工具。文献 [1] 将分数

阶微积分应用到经典电磁场中, 提出了分数阶多极子的定义, 并计算了其空间电势分布情况; 文献 [2] 提出了一种分数阶正弦振荡器, 并给出了设计步骤和实验模型; 文献 [3] 提出了一种分数阶永磁同步电机, 其控制策略更加简单灵

基金项目: 国家自然科学基金重点项目资助 51437005

活；文献 [4] 将分数阶微积分运算应用到遗传算法中，建立了分数阶传递函数模型；文献 [5] 应用分数阶微积分相关知识研究了反向热传导问题。文献 [6] 分析和总结了分数阶 RLC 并联电路的基本特征和规律；文献 [7] 讨论了分数阶 RLC 串联电路在电感、电容阶数相同时的复杂特性；文献 [8] 则研究了分数阶 LC 串联电路在电感、电容阶数不同时的幅值响应和相位响应。近几年来，无线电能传输得到了长足的发展，其系统中蕴含的电容与电感特性也是一个研究的热点。然而，目前涉及到磁能耦合和电能转换等方面系统的分数阶特性分析还较少。

本文首先对传统分数阶 $L_\beta C_\alpha$ 串、并联电路（以串联为例）的阻抗特性分析进行了介绍，得出了不同阻抗特性下，阻抗频率、幅值与电路阶次 α 、 β 的关系，作出其相频特性曲线。随后，沿用这种分析方法，分析了分数阶互感电路及变压器模型的阻抗矩阵参数的阻抗特性，作出其等效电路阻抗矩阵参数的相位与电感阶次的关系曲线，并得出了不同阻抗特性下，阻抗频率、幅值与电感阶次的关系。由于分数阶互感电路及变压器模型的电路参数增加了自感和互感的阶次，因此该模型的设计自由度更高，应用范围更广。

2 分数阶 $L_\beta C_\alpha$ 串、并联电路的特性分析

由文献 [9] 可知，分数阶电感阻抗和分数阶电容导纳的 s 域方程为：

$$\begin{cases} Z_\beta(s) = L_\beta s^\beta \\ Y_\alpha(s) = C_\alpha s^\alpha \end{cases} \quad (1)$$

令 $s = j\omega$ ，则分数阶电感的阻抗和分数阶电容的导纳可化为：

$$\begin{cases} Z_\beta(j\omega) = L_\beta \omega^\beta e^{j(\frac{\beta\pi}{2})} \\ = L_\beta \omega^\beta (\cos \frac{\beta\pi}{2} + j \sin \frac{\beta\pi}{2}) \\ Y_\alpha(j\omega) = C_\alpha \omega^\alpha e^{j(\frac{\alpha\pi}{2})} \\ = C_\alpha \omega^\alpha (\cos \frac{\alpha\pi}{2} + j \sin \frac{\alpha\pi}{2}) \end{cases} \quad (2)$$

分数阶 $L_\beta C_\alpha$ 串、并联电路的拓扑分别如图 1(a)、1(b) 所示。根据电路原理，串联电路的阻抗和并联电路的导纳互为对偶关系，若不改变对偶元件的值，则解的形式一致。因此，本文以分数阶 $L_\beta C_\alpha$ 串联电路为例来分析其阻抗特性。

根据方程 (2) 可知，分数阶 $L_\beta C_\alpha$ 串联电路的阻抗可

写作：

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= Z_\alpha(j\omega) + Z_\beta(j\omega) \\ &= (\omega^\beta L_\beta (\cos \frac{\beta\pi}{2} + \omega^{-\alpha} C_\alpha^{-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2}) \\ &\quad + j(\omega^\beta L_\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} - \omega^{-\alpha} C_\alpha^{-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2})) \\ &= \text{Re}[Z(j\omega)] + j \text{Im}[Z(j\omega)] \\ &= |Z(j\omega)| \cdot \angle \varphi(\omega) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $|Z(j\omega)|$ 为阻抗幅值， $\varphi(\omega)$ 为阻抗相位角，且有：

$$|Z(j\omega)| = [(\text{Re}[Z(j\omega)])^2 + (\text{Im}[Z(j\omega)])^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}[Z(j\omega)]}{\text{Re}[Z(j\omega)]} \quad (5)$$

由方程 (3) 可知，分数阶 $L_\beta C_\alpha$ 串联阻抗特性不仅与电感值、电容值、频率有关，还与电感、电容的阶数 β 、 α 有关。在 L 、 C 、 ω 一定的情况下，随着 α 、 β 的改变，分数阶 $L_\beta C_\alpha$ 串联电路会表现出不同的阻抗特性。

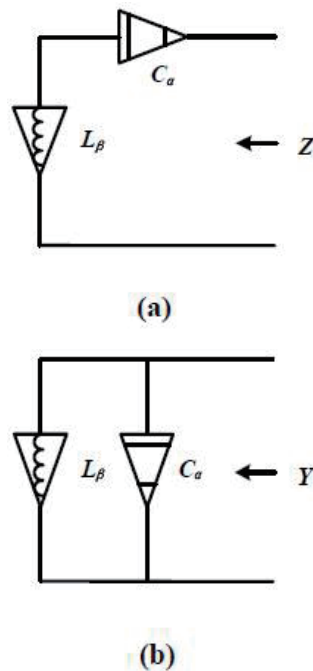


图 1 (a) 分数阶 $L_\beta C_\alpha$ 串联电路 (b) 分数阶 $L_\beta C_\alpha$ 并联电路

2.1 纯实部阻抗特性

令 $\text{Im}[Z(j\omega)] = 0$ ，即

$$\omega^\beta L_\beta \sin \frac{\beta\pi}{2} = \omega^{-\alpha} C_\alpha^{-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \quad (6)$$

则电路呈现纯阻性，此时电路角频率为：

$$\omega_r = \left(\sin \frac{\alpha\pi}{2} / (L_\beta C_\alpha \sin \frac{\beta\pi}{2}) \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \quad (7)$$

将 ω_r 代入方程 (3), 得到此时电路的阻抗为:

$$Z(j\omega_r) = \omega_r^\beta L_\beta \left(\sin \frac{(\alpha+\beta)\pi}{2} / \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) \quad (8)$$

考虑一个相位周期, 则有:

$$0 < \frac{(\alpha+\beta)\pi}{2} < 2\pi \quad (9)$$

这里我们不考虑 L_β 、 C_α 同时表现感性或容性的情况 (实际上相当于一个分数阶电感或分数阶电容), 这样可以得到 α 、 β 的范围为:

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 2 \\ 0 < \beta < 2 \end{cases} \quad (10)$$

根据方程 (7), 可以得到 ω_r 与 α 、 β 的关系曲线, 如图 2 所示。由图 2 可知, 随着 α 、 β 的增加, ω_r 有减小的趋势, 且当 $\alpha \rightarrow 0^+$ 时, ω_r 出现最大值尖峰; 当 $\alpha \rightarrow 2^-$ 时, $\omega_r \rightarrow 0$ 。

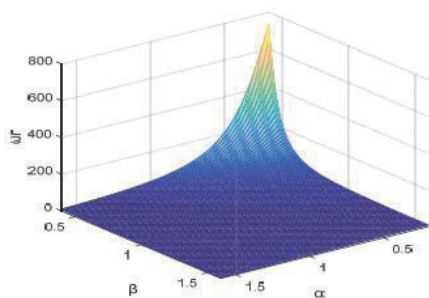


图 2 ω_r 与 α 、 β 的关系曲线

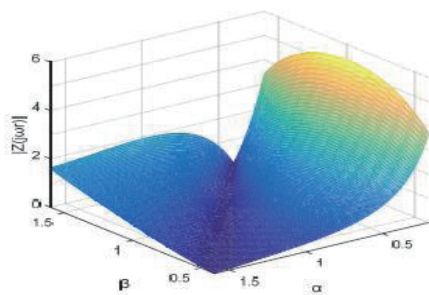


图 3 $|Z(j\omega_r)|$ 与 α 、 β 的关系曲线

由方程 (8) 可知, 当 $\alpha + \beta < 2$ 时, 阻抗 $Z(j\omega_r) > 0$, 表现出正电阻的特性; 当 $\alpha + \beta > 2$ 时, 阻抗 $Z(j\omega_r) < 0$, 表现出负电阻的特性; 当 $\alpha + \beta = 2$ 时, $Z(j\omega_r)$

= 0。阻抗幅值 $Z(j\omega_r)$ 与 α 、 β 的关系如图 3 所示。

2.2 纯虚部阻抗特性

令 $\text{Re}[Z(j\omega)] = 0$, 即

$$\omega^\beta L_\beta \cos \frac{\beta\pi}{2} = -\omega^{-\alpha} C_\alpha^{-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \quad (11)$$

则电路呈现纯感性或纯容性。由空间矢量关系可知, 只有当 $\alpha < 1 < \beta$ 或 $\beta < 1 < \alpha$ 时, 方程 (11) 才能成立。此时电路角频率为:

$$\omega_i = \left(-\cos \frac{\alpha\pi}{2} / (L_\beta C_\alpha \cos \frac{\beta\pi}{2}) \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \quad (12)$$

将 ω_i 代入方程 (13), 得到此时电路的阻抗为:

$$Z(j\omega_i) = j\omega_i^\beta L_\beta \left(\sin \frac{(\alpha+\beta)\pi}{2} / \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) \quad (13)$$

根据方程 (12), 可以得到 ω_i 与 α 、 β 的关系曲线, 如图 4 所示。由图 4 可知, 在 $\alpha < 1 < \beta$ 和 $\beta < 1 < \alpha$ 两种情况下, ω_i 均随着 β 的增大而减小; 当 $\beta < 1$ 且 $\alpha \rightarrow 1^+$ 时, ω_i 出现最大值; 当 $\beta < 1$ 时, ω_i 随着 α 的增大而减小。

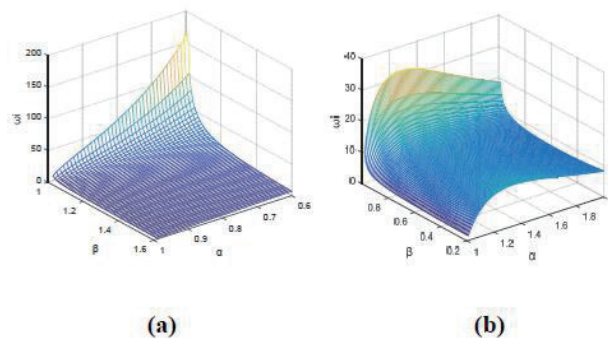


图 4 ω_i 与 α 、 β 的关系曲线 (a) $\alpha < 1 < \beta$ (b) $\beta < 1 < \alpha$

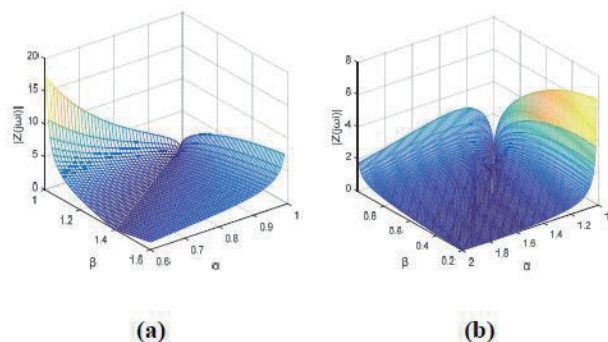


图 5 $|Z(j\omega_i)|$ 与 α 、 β 的关系曲线 (a) $\alpha < 1 < \beta$ (b) $\beta < 1 < \alpha$

由方程 (13) 可知, 当 $\alpha \rightarrow 1$ 时, $Z(j\omega_i) \rightarrow \infty$; 当

$\alpha + \beta = 2$ 时, $Z(j\omega_i) = 0$ 。阻抗幅值 $Z(j\omega_i)$ 与 α 、 β 的关系如图 5 所示。

2.3 相频特性

由上述分析可知, 当 $\omega = \omega_r$ 即电路表现纯阻性时, $\phi(\omega) = 0$; 当 $\omega = \omega_i$ 即电路表现纯感性或纯容性时, $\phi(\omega) = \pm \pi/2$ 。一般情况下, 根据方程 (5), 可以得到分数阶 $L_\beta C_\alpha$ 串联电路的相频特性曲线, 如图 7 ($\alpha + \beta < 2$)、图 8 ($\alpha + \beta > 2$) 所示。

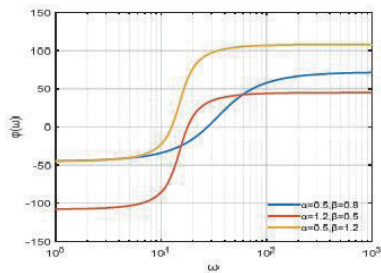


图 6 $\alpha + \beta < 2$ 时的阻抗相频特性曲线

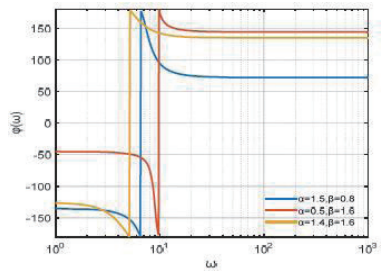


图 7 $\alpha + \beta > 2$ 时的阻抗相频特性曲线

由图 6、图 7 可知, 当 $\alpha + \beta < 2$ 时, 随着 ω 的变化, $\phi(\omega)$ 的变化是连续的, 且由 $-\alpha\pi/2$ 变化到 $\beta\pi/2$; 当 $\alpha + \beta > 2$ 时, $\phi(\omega)$ 同样由 $-\alpha\pi/2$ 变化到 $\beta\pi/2$, 但变化是不连续的, 在 $\omega = \omega_r$ 时 $\phi(\omega)$ 发生了跳变。

3 分数阶互感及变压器模型的特性分析

从上节的分析可知, 分数阶 $L_\beta C_\alpha$ 的阻抗特性相比于整数阶情况发生了很大变化。本节将运用上节阻抗分析的方法分析分数阶互感电路和分数阶变压器模型的阻抗特性。分数阶互感电路和变压器模型如图 8 所示, 其中原边电感和副边电感的阶数分别为 α 、 β , 互感阶数为 γ 。根据文献 [10], 其等效电路如图 9 所示。

由图 9 可得, 分数阶互感电路的阻抗参数矩阵方程为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s^\alpha L_{11} + s^\gamma M & s^\gamma M \\ s^\gamma M & s^\beta L_{22} + s^\gamma M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

令 $s = j\omega$, 则可得:

$$\begin{cases} Z_{11}(j\omega) = (\omega^\alpha L_{11} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \omega^\gamma M \cos \frac{\gamma\pi}{2}) \\ \quad + j(\omega^\alpha L_{11} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \omega^\gamma M \sin \frac{\gamma\pi}{2}) \\ Z_{22}(j\omega) = (\omega^\beta L_{22} \cos \frac{\beta\pi}{2} + \omega^\gamma M \cos \frac{\gamma\pi}{2}) \\ \quad + j(\omega^\beta L_{22} \sin \frac{\beta\pi}{2} + \omega^\gamma M \sin \frac{\gamma\pi}{2}) \\ Z_{12,21}(j\omega) = \omega^\gamma M \cos \frac{\gamma\pi}{2} + j\omega^\gamma M \sin \frac{\gamma\pi}{2} \end{cases} \quad (15)$$

为了简化分析, 本文主要讨论 $\alpha = \beta$ 情况下分数阶互感电路的阻抗参数特性。

当 $\alpha = \beta = \gamma$ 时, 阻抗参数矩阵可写作:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^\alpha (L_{11} + M) & s^\alpha M \\ s^\alpha M & s^\alpha (L_{22} + M) \end{bmatrix} \quad (16)$$

由上式可知, 阻抗参数矩阵是对称矩阵, 因此分数阶互感电路也是对称的。此时所有阻抗矩阵参数的相角均为 $\alpha\pi/2$, 只与阶数 α 有关。特别地当 $\alpha = \beta = \gamma = 1$ 时, 所以阻抗矩阵参数实部均为 0, 相角均为 $\pi/2$, 表现出纯感性。

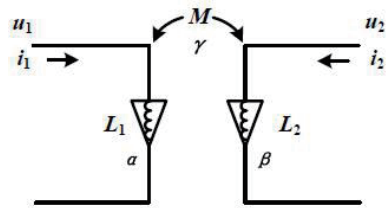


图 8 分数阶互感及变压器模型

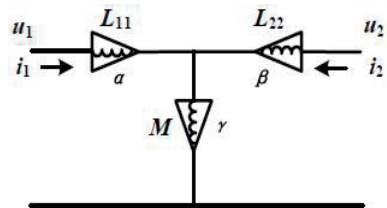
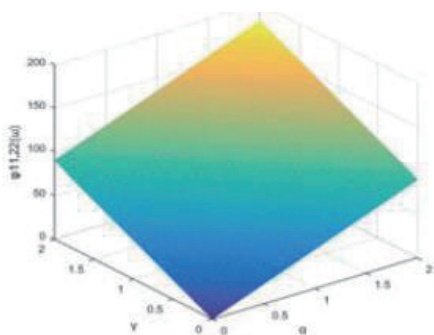


图 9 分数阶互感及变压器模型的等效电路

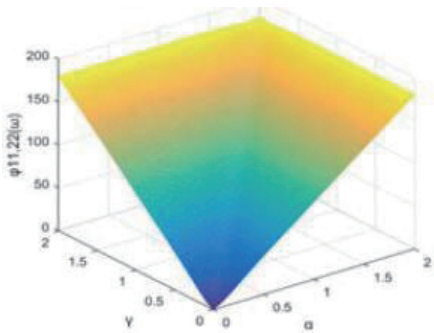
当 $\alpha = \beta \neq \gamma$ 时, 易知 Z_{12} 、 Z_{21} 的相角为 $\gamma\pi/2$, Z_{11} 、 Z_{22} 的相角 $\phi_{11,22}(\omega)$ 可根据方程 (5) 计算。如图

10(a)、10(b)所示分别为 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 和 $\omega = 10\text{k rad/s}$ 时, $\phi_{11,22}(\omega)$ 与 $\alpha(\beta)$ 、 γ 之间的关系。

由图 10 可知, 当 ω 一定时, 在 $0 < \alpha(\beta) < 2$ 且 $0 < \gamma < 2$ 的范围内, 随着 $\alpha(\beta)$ 、 γ 的增加, $\phi_{11,22}(\omega)$ 也增加。由图像的对称性可以看出, $\alpha(\beta)$ 、 γ 对 $\phi_{11,22}(\omega)$ 的影响是一致的。而当 $\alpha(\beta)$ 、 γ 一定时, 随着 ω 的增大, $\phi_{11,22}(\omega)$ 也增大。



(a)



(b)

图 10 Z_{11} 、 Z_{22} 的相角 $\phi_{11,22}(\omega)$ 与 $\alpha(\beta)$ 、 γ 的关系曲线
(a) $\omega = 1 \text{ rad/s}$ (b) $\omega = 10\text{k rad/s}$

令方程 (15) 中 Z_{11} 、 Z_{22} 的虚部为 0, 即:

$$\omega^\alpha L_{11,22} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \omega^\gamma M \sin \frac{\gamma\pi}{2} = 0 \quad (17)$$

可得频率和阻抗分别为:

$$\omega = \left((-M \sin \frac{\gamma\pi}{2}) / (L_{11,22} \sin \frac{\alpha\pi}{2}) \right)^{\frac{1}{\alpha-\gamma}} \quad (18)$$

$$Z_{11,22}(j\omega) = \omega^\alpha L_{11,22} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \omega^\gamma M \cos \frac{\gamma\pi}{2} \quad (19)$$

此时阻抗参数表现出纯实部特性。作 γ 关于与 $\alpha(\beta)$ 的曲线, 如图 11 所示。由图 11 可知, 在 $0 < \alpha(\beta)$

< 2 的范围内, Z_{11} 、 Z_{22} 表现纯实部特性实际上是无解的。

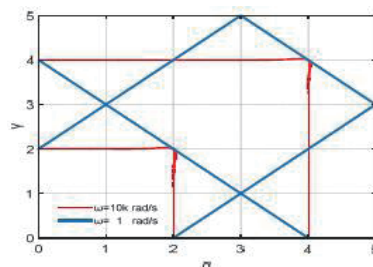


图 11 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 和 $\omega = 10\text{k rad/s}$ 时 γ 与 $\alpha(\beta)$ 的关系曲线

令方程 (15) 中 Z_{11} 、 Z_{22} 的实部为 0, 即:

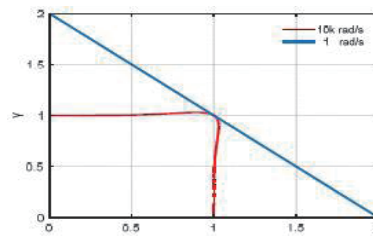
$$\omega^\alpha L_{11,22} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \omega^\gamma M \cos \frac{\gamma\pi}{2} = 0 \quad (20)$$

可得频率和阻抗分别为:

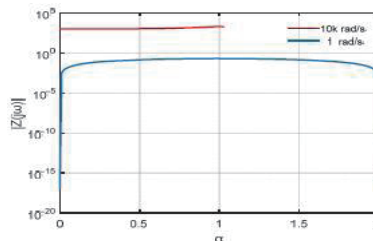
$$\omega = \left((-M \cos \frac{\gamma\pi}{2}) / (L_{11,22} \cos \frac{\alpha\pi}{2}) \right)^{\frac{1}{\alpha-\gamma}} \quad (21)$$

$$Z_{11,22}(j\omega) = \omega^\alpha L_{11,22} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \omega^\gamma M \sin \frac{\gamma\pi}{2} \quad (22)$$

此时阻抗参数表现出纯虚部特性。给定 $\alpha(\beta)$ 与 ω 的值, 便可以确定 γ 的值。如图 12(a)、图 12(b) 所示分别为 γ 、 $Z_{11,22}(j\omega)$ 与 $\alpha(\beta)$ 的关系曲线。由图 12(b) 可知, $\alpha = \beta = \gamma = 1$ 时, 阻抗幅值最大。



(a)



(b)

图 12 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 和 $\omega = 10\text{k rad/s}$ 时 (a) γ 与 $\alpha(\beta)$ 的关系曲线
(b) $Z_{11,22}(j\omega)$ 与 $\alpha(\beta)$ 的关系曲线

下转 153 页